

3. Konsequenzen

I. Es gibt (im wesentlichen) eine einzige Möglichkeit, die Vorstellung objektiver Zustände des Einzelsystems im Sinn der Forderungen a) und b) in der Quantenmechanik aufrechtzuerhalten⁵. Diese Möglichkeit: die Auffassung von ψ als objektivem Ausdruck für den Systemzustand, ist bereits häufig diskutiert worden. Sie führt zu Schwierigkeiten, wenn man die Wechselwirkung zweier Systeme in Betracht zieht⁶ und hat außerdem die merkwürdige Konsequenz, daß jede Gesamtheit äquivalent ist einer speziellen Gesamtheit, in der nur ein Teil der Zustände (die Wellenfunktionen eines einzigen Orthogonalsystems) vorkommen.

II. Die Argumentation in 2. hat Berührungs-

⁵ Man kann sich natürlich beliebig viele umfassendere Zustandsmannigfaltigkeiten ausdenken, doch besteht dazu im Rahmen unserer Forderungen kein Anlaß und es wird nichts dadurch gewonnen.

punkte mit dem Beweis, den v. Neumann⁷ für die Indeterminierbarkeit der Quantenmechanik gegeben hat. In der Tat ist die Aufgabe (5), auf die das Problem reduziert wurde, identisch mit der Frage, nach den „reinen“ Gesamtheiten bei v. Neumann. Man kann also sagen: die Forderungen a) und b) an den Zustandsbegriff verlangen zumindest, daß eine Gesamtheit von Systemen im gleichen Zustand ξ eine „reine“ Gesamtheit sei. Im Gegensatz zu dem erwähnten Indeterminierbarkeitsbeweis kommt es bei der Frage nach der kleinsten Zustandsmannigfaltigkeit jedoch nicht darauf an, daß keine Gesamtheiten existieren, die nicht durch eine statistische Matrix U beschrieben werden können, sondern nur darauf, daß jedes U durch eine Gesamtheit realisierbar ist.

⁶ W. Heisenberg, s. Zitat 1: Schnittbeweis; Einstein, Podolsky u. Rosen, *Physic. Rev.* **47**, 777 [1935].

⁷ J. v. Neumann: Die mathematischen Grundlagen der Quantenmechanik, Springer Verlag.

Zur Theorie der Streuung von Elektronen an Elektronen

Von H. SALECKER

Aus dem Institut für theoretische und angewandte Physik der Technischen Hochschule Stuttgart

(Z. Naturforschg. **8a**, 16–19 [1953]; eingegangen am 18. November 1952)

Herrn Professor Dr. Erwin Fues zum 60. Geburtstag

Im Hinblick auf eine experimentelle Prüfung der höheren Näherungen der Quantenelektrodynamik mit Hilfe der Streuung von Elektronen an Elektronen werden die Abänderungen der Elektron-Elektron-Streuung untersucht, die sich aus der verallgemeinerten Feldtheorie ergeben. Im ersten Abschnitt wird das allgemeine Matrixelement für eine beliebige Strukturfunktion angegeben. Im zweiten Abschnitt wird der differentielle Wirkungsquerschnitt für eine Spezialisierung berechnet und der allgemeine Wirkungsquerschnitt mit Hilfe des berechneten dargestellt. Zum Schluß werden die Abweichungen von der Möllerschen Formel diskutiert, die sich bei zwei verschiedenen gewählten Größen der Abänderung (des „Elektronenradius“) ergeben. Dabei zeigt es sich, daß die betrachteten Abweichungen bei einer plausiblen Größe der Abänderung erst dann deutlich bemerkt werden können, wenn die Energie des einfallenden Teilchens im Laboratoriumssystem 10^9 eV überschreitet.

Die höheren Näherungen der Quantenelektrodynamik sind mit großer Genauigkeit durch zwei Experimente bestätigt. Das sind bekanntlich die Messungen des zusätzlichen magnetischen Moments des Elektrons und der Lambschen Verschiebung bei der Feinstruktur des Wasserstoffs. Diese beiden Effekte hängen jedoch von den Einzelheiten der Theorie wesentlich nur im nichtrelativistischen Gebiet, d. h. vom Bereich kleiner Energie-Impuls-Übertragung ab. Es sind deshalb quantitative Prü-

fungen der höheren Näherungen der Quantenelektrodynamik im Bereich großer Energie-Impuls-Übertragungen nötig. Dazu kommen besonders Streuexperimente in Frage. Die Streuung von Elektronen an Kernen, an die man dabei zunächst denkt, ist jedoch hierzu nicht sehr geeignet, da die Ladungsverteilung der Kerne nicht genau bekannt ist. Man benutzt vielmehr umgekehrt Abweichungen von der normalen Streuung zur Bestimmung der Ladungsverteilung. Im Rahmen der Quantenelektrodynamik bietet sich



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitalized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

deshalb neben der Compton-Streuung besonders die Streuung von Elektronen an Elektronen. Diese wurde in der niedrigsten nicht verschwindenden Näherung der Störungsrechnung von Møller¹ berechnet. Zu ihrer Prüfung sind eine Reihe von Experimenten unternommen worden, die zum Teil voneinander abweichende Ergebnisse geliefert haben. Während der größte Teil der Arbeiten die Møllersche Formel innerhalb der (teilweise allerdings recht großen) experimentellen Fehlergrenzen bestätigte², ergeben einige Arbeiten eine größere Zahl der relativ energiearmen Sekundärelektronen und einen steileren Abfall der Sekundärelektronenverteilung (in Abhängigkeit von der übertragenen Energie) als die Møllersche Formel³. Um auch bei hohen Energien und starker Energie-Impuls-Übertragung einen quantitativen Vergleich zu machen, ist neben der erforderlichen experimentellen Genauigkeit auch die Berechnung der Strahlungskorrektur zur Møllerschen Formel, d. h. der nächst höheren Näherung der Störungsrechnung in der Lösung der quantenelektrodynamischen Grundgleichungen nötig. Es ist aber möglich, daß in dem Gebiet, in dem die Strahlungskorrektur für die Streuung von Elektronen an Elektronen wesentlich wird, auch bereits Abänderungen der Quantenelektrodynamik eine Rolle spielen, so daß die gewöhnliche Theorie selbst in höheren Näherungen hier keine genügend genauen Ergebnisse mehr liefern kann. Die Abänderungen der vorhandenen Quantenelektrodynamik sind bisher meist unter dem Gesichtspunkt diskutiert worden, daß alle in der Theorie vorkommenden Integrale (insbesondere die Selbstenergie- und Vakuum-Polarisations-Integrale) endlich sein sollten. Aber auch dann, wenn man diese divergenten Integrale nicht als Mangel, sondern als eine ganz bestimmte physikalische Aussage der Theorie ansieht⁴, erscheinen Abänderungen der gewöhnlichen Quantenelektrodynamik für genügend große Energieübertragungen schon wegen der (experimentell sichergestellten) Wechselwirkungen von Elektronen und

Lichtquanten mit den anderen Elementarteilchen, die nicht durch die Quantenelektrodynamik beschrieben werden, möglich.

In der vorliegenden Arbeit sollen deshalb die Abänderungen der Streuung von Elektronen an Elektronen untersucht werden, die im Rahmen der verallgemeinerten Feldtheorie⁵ auftreten.

1. Das allgemeine Matricelement

Das Matricelement für die Elektron-Elektron-Streuung in der verallgemeinerten Feldtheorie läßt sich bei Benutzung des Feynmanschen Formalismus unmittelbar angeben. Der Übergang von der gewöhnlichen Quantenelektrodynamik zu der verallgemeinerten Theorie kann nach Feynman⁶ einfach dadurch vollzogen werden, daß die Ausbreitungsamplitude der Quanten mit dem Energie-Impuls-Vektor k_μ , die in der gewöhnlichen Theorie $1/k_\mu^2$ beträgt, durch die neue Ausbreitungsamplitude

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{k_\mu^2} - \frac{1}{k_\mu^2 + \lambda^2} \right) G(\lambda) d\lambda \quad (1)$$

ersetzt wird. Dabei bedeutet $k_\mu^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 - k_4^2$, während $G(\lambda)$ die in der verallgemeinerten Feldtheorie enthaltene noch unbestimmte Strukturfunktion darstellt. Für $G(\lambda)$ gilt die Beziehung

$$\int_0^\infty G(\lambda) d\lambda = 1. \quad (2)$$

Setzt man

$$G(\lambda) = \delta(\lambda - \lambda_0) \quad (3)$$

und geht dann zur Grenze $\lambda_0 \rightarrow \infty$ über, so erhält man die gewöhnliche Theorie zurück.

Das Møllersche Matricelement hat nun die Form⁷

$$H_M = \frac{4\pi\hbar^2 c^2 e^2}{k_\mu^2} (u_1^{o+} \alpha_\mu u_1) (u_2^{o+} \alpha_\mu u_2), \quad (4)$$

so daß wir nach (1) für das Matricelement in der verallgemeinerten Feldtheorie erhalten

¹ C. Møller, Ann. Physik (5) **14**, 531 [1932].

² F. C. Champion, Proc. Roy. Soc. (London), Ser. A **137**, 688 [1932]; L. A. Page u. W. M. Woodward, Physic. Rev. **79**, 228 [1950]; G. Groetzinger, L. B. Leder, F. L. Ribe u. M. J. Berger, Physic. Rev. **79**, 454 [1950]; L. A. Page, Physic. Rev. **81**, 1062 [1951]; M. B. Scott, A. O. Hanson u. E. M. Lyman, Physic. Rev. **84**, 638 [1951]; W. B. Barber, G. E. Becker u. E. L. Chu, Physic. Rev. **85**, 774 [1952]; W. H. Barkas, R. W. Deutsch, F. C. Gilbert u. C. E. Violet, Physic. Rev. **86**, 59 [1952].

³ E. J. Williams u. F. R. Terroux, Proc. Roy.

Soc. (London), Ser. A **126**, 289 [1930]; P. E. Shearman u. T. E. Pardue, Physic. Rev. **59**, 933 [1941]; M. Deutschmann, Z. Naturforschg. **2a**, 61 [1947].

⁴ H. Salecker, Z. Naturforschg. **7a**, 633 [1952].

⁵ F. Bopp, Ann. Physik (5) **38** 345 [1940]; (5) **42**, 573 [1942]; Z. Naturforschg. **1**, 53, 196, 236 [1946]; **3a**, 564 [1948]; Z. Physik **125**, 615 [1949]; F. Bopp u. F. L. Bauer, Z. Naturforschg. **4a**, 611 [1949].

⁶ R. P. Feynman, Physic. Rev. **76**, 769 [1949].

⁷ Vgl. etwa W. Heitler, The Quantum Theory of Radiation. 2. Aufl. Oxford 1944, S. 101.

$$H_{VF} = 4\pi\hbar^2 c^2 e^2 \int_0^{\lambda_0} \left(\frac{1}{k_\mu^2} - \frac{1}{k_\mu^2 + \lambda^2} \right) G(\lambda) d\lambda (u_1^{0+} \alpha_\mu u_1) (u_2^{0+} \alpha_\mu u_2). \quad (5)$$

Hierbei gilt wegen der Erhaltungssätze

$$k_\mu = p_{\mu 1} - p_{\mu 1}^0,$$

wobei $p_{\mu 1}^0$ und $p_{\mu 1}$ den Energie-Impuls-Vierervektor des Elektrons 1 vor bzw. nach dem Stoß darstellen. Die übrigen Symbole haben die übliche Bedeutung. u_1^0 , u_1 bezeichnen die Diracschen Amplituden des Elektrons 1 vor bzw. nach dem Stoß, α_μ die Diracschen Matrizen ($\alpha_4 = 1$), e die experimentell beobachtete Elektronenladung. Entsprechendes gilt für das Elektron 2 usw.

Vergleicht man das Matricelement (5) mit dem Möllerschen Ausdruck (4), so sieht man unmittelbar, daß die Stöße mit großer Energie-Impuls-Übertragung k_μ jetzt seltener vorkommen werden. Dieser Effekt wird für solche Energie-Impuls-Übertragungen merklich werden, die in die Größenordnung der für $G(\lambda)$ wesentlichen λ fallen. Da die Strukturfunktion $G(\lambda)$ die Abänderung gegenüber der gewöhnlichen Theorie charakterisiert, muß $G(\lambda)$ so beschaffen sein, daß sich erst für genügend kleine Dimensionen bzw. für genügend hohe Energien Abweichungen gegenüber der gewöhnlichen Theorie ergeben. Nach den bisher vorliegenden Erfahrungen könnte das z. B. im Gebiet des klassischen Elektronenradius $r_0 = e^2/(mc^2)$, d. h. in der Energieskala für $\lambda_0 = (\hbar c/e^2) mc^2 \approx 137 mc^2$ vorkommen (m bedeutet die experimentell beobachtete Elektronenmasse). Die Funktion $G(\lambda)$ ist dann so zu wählen, daß die wesentlichen λ in die Größenordnung von λ_0 fallen und daß für $k_\mu^2 \ll \lambda_0^2$ die Ergebnisse der unveränderten Theorie herauskommen.

2. Spezialisierung auf ein Beispiel

Wir wollen diese Verhältnisse quantitativ für ein spezielles Beispiel von $G(\lambda)$ verfolgen, von dem man leicht zur allgemeinen Theorie bzw. anderen Spezialisierungen übergehen kann und das gleichzeitig in der Lage ist, alle Züge des allgemeinen Falles zu erläutern. Dazu wählen wir für $G(\lambda)$ die Funktion (3), wobei jedoch λ_0 jetzt einen festen endlichen Wert annehmen soll. Dieser Spezialfall entspricht der ersten Theorie von Bopp⁸ in der quantisierten Form von Podolsky und Mitarbeiter⁹. Dann lautet nach (3) und (5) das Matricelement für die Elektron-Elektron-Streuung

$$H_{BP} = 4\pi\hbar^2 c^2 e^2 \left(\frac{1}{k_\mu^2} - \frac{1}{k_\mu^2 + \lambda_0^2} \right) (u_1^{0+} \alpha_\mu u_1) (u_2^{0+} \alpha_\mu u_2). \quad (6)$$

Dieser Ausdruck wurde bereits von Montgomery¹⁰ aus der Podolskyschen Spezialisierung der Theorie abgeleitet. Dort war $\lambda_0 = \hbar c/a$ gesetzt, wobei a etwa die Rolle des Elektronenradius in dieser Theorie spielt. Für $k_\mu^2 \ll \lambda_0^2$ geht (6) in das Möllersche Matricelement (4) über, d. h. für kleine Energie-Impuls-Übertragungen gegenüber λ_0 erhalten wir die Ergebnisse der unveränderten Quantenelektrodynamik.

Wir wollen nun den aus (6) folgenden differentiellen Wirkungsquerschnitt für die Streuung von Elektronen an Elektronen berechnen. Dabei ergibt sich nach längeren Umrechnungen der folgende Ausdruck für die Anzahl der Stöße, bei der das Primärelektron eine Energie zwischen Q und $Q + dQ$ verliert (Rechnung im sogenannten Laboratoriumssystem, d. h. $E_2^0 = mc^2$):

$$d\Phi_{BP}(\lambda_0) = \frac{\pi e^4 dQ}{m c^2 (\gamma^2 - 1) Q^2 (1 - A)^2} \left\{ \frac{\lambda_0^4 (1 - A)^2}{[m^2 c^4 (\gamma - 1) 2A + \lambda_0^2]^2} F_1(\gamma, A) + \right. \\ \left. + \frac{\lambda_0^4 2A (1 - A) \gamma (\gamma - 2)}{[m^2 c^4 (\gamma - 1) 2A + \lambda_0^2][m^2 c^4 (\gamma - 1) 2(1 - A) + \lambda_0^2]} + \frac{\lambda_0^4 A^2}{[m^2 c^4 (\gamma - 1) 2(1 - A) + \lambda_0^2]^2} F_2(\gamma, A) \right\} \quad (7)$$

mit

$$F_1(\gamma, A) = \frac{5}{4} (\gamma^2 + 1) - \frac{1}{2} \gamma \pm \frac{1}{2} (\gamma + 3) (\gamma - 1) (1 - 2A) + \frac{1}{4} (\gamma - 1)^2 (1 - 2A)^2.$$

⁸ F. Bopp, Ann. Physik (5) **38**, 345 [1940].

⁹ B. Podolsky, Physic. Rev. **62**, 68 [1942]; B. Po-

dolsky u. C. Kikuchi, Physic. Rev. **65**, 228 [1944]; **67**, 184 [1945].

¹⁰ D. J. Montgomery, Physic. Rev. **69**, 117 [1946].

Für F_1 gilt das obere Vorzeichen im dritten Glied, für F_2 das untere. Hier bedeuten wie bei Møller¹: Q die beim Stoß übertragene Energie,

$$\gamma = E_1^0/(mc^2) = 1/\sqrt{1-(v_1^0/c)^2},$$

$$A = Q/T, T = mc^2(\gamma - 1)$$

die kinetische Energie des Primärelektrons. Statt in Abhängigkeit von A kann man auch ganz entsprechend wie in der Arbeit von Møller¹ den Wirkungsquerschnitt in Abhängigkeit vom Streuwinkel Θ darstellen.

Wegen (5) und (6) läßt sich der Wirkungsquerschnitt $d\Phi_{VF}$ der allgemeinen Theorie mit beliebigem $G(\lambda)$ leicht aus (7) berechnen:

$$d\Phi_{VF} = \int_0^\infty d\Phi_{BF}(\lambda) G(\lambda) d\lambda. \quad (8)$$

$$d\Phi_M = \frac{2\pi e^4 dQ}{mc^2(\gamma^2 - 1)Q^2} \left\{ \gamma^2 - [3\gamma^2 - (\gamma - 1)^2]A(1 - A) + (\gamma - 1)^2 A^2(1 - A)^2 \right\}, \quad (7a)$$

wie es sein muß.

Wie man aus (7) unmittelbar ersieht, besteht die Abweichung gegenüber der Möllerschen Formel (7a) immer darin, daß die Anzahl der Stöße mit einer übertragenen Energie zwischen Q und $Q + dQ$ verringert wird, und zwar um so stärker, je größer Q ist. D. h. es ergeben sich ein steilerer Abfall als bei Møller und immer kleinere Absolutwerte, die erst für den Gültigkeitsbereich von (9) mit den Möllerschen Werten zusammenfallen, sie jedoch nie überschreiten. Damit besteht keine Möglichkeit, die oben genannten Messungen³ im Rahmen der verallgemeinerten Feldtheorie zu deuten, da diese Arbeiten gerade im Bereich kleiner Energieübertragung größere Absolutwerte finden als der Möllerschen Formel entsprechen.

Zum quantitativen Vergleich kommt es nun darauf an, wie groß λ_0 angesetzt wird. Wählt man λ_0 von der bereits oben betrachteten Größe $\lambda_0 = (\hbar c/e^2) mc^2 \approx 137 mc^2 \approx 70$ MeV (wegen $\lambda_0 = \hbar c/a$ entspricht dieser Wahl ein „Elektronenradius“ $a = e^2/(mc^2)$ also von der Größe des klassischen Elektronenradius), so zeigt unsere Bedingung (9) unmittelbar, daß γ mindestens von der Größenordnung 2000 sein muß (also $E_1^0 \approx 10^9$ eV), um wenigstens im Bereich $A \geq 0,1$ eine deutliche Abweichung zu erhalten ($\geq 10\%$). Das bedeutet, daß bei dieser

Für $A \ll 1$ (d. h. für genügend kleine Energieübertragung) kann man sich in (7) auf das erste Glied in der Klammer beschränken. Gilt dagegen

$$m^2 c^4 (\gamma - 1) 2A \ll \lambda_0, \quad (9)$$

so sind die Abweichungen von der Möllerschen Formel vernachlässigbar klein, d. h. wir erhalten näherungsweise dieselben Ergebnisse wie aus der unveränderten Quantenelektrodynamik. (9) ist mit der früher erwähnten Bedingung $k_\mu^2 \ll \lambda_0^2$ im Laboratoriumssystem identisch. Wenn (9) und $A \ll 1$ zusammen erfüllt sind, ergibt sich aus (7) wieder die klassische Formel von Thomson und Bohr, d. h. der bekannte Abfall der Sekundärelektronenverteilung $\sim 1/Q^2$. Mit $\lambda_0 \rightarrow \infty$, dem Grenzübergang zur gewöhnlichen Quantenelektrodynamik, folgt aus (7) die Möllersche Streuformel

Größe von λ_0 in den bisher gemessenen Bereichen^{2,3} im Rahmen der verallgemeinerten Feldtheorie überhaupt keine merkliche Abweichung von der Möllerschen Formel auftritt. Diese Folgerung stimmt mit der ersten Gruppe der vorliegenden Messungen² überein. Setzt man dagegen $\lambda_0 = \hbar c/a = mc^2$, d. h. $a = \hbar/mc$ (gleich der Compton-Wellenlänge), so ergibt sich zwar ein steilerer Abfall, der innerhalb der Fehlergrenzen zu den Messungen von Deutschmann³ passen würde, jedoch sind, wie schon erwähnt wurde, die Absolutwerte von (7) kleiner als die Möllerschen und damit gegenüber den experimentellen Werten zu klein. Auch lassen sich Bedenken erheben gegen ein so kleines λ_0 , d. h. gegen die Wahl einer so großen Reichweite der Abänderung wie die Compton-Wellenlänge.

Nach den heute bei der kosmischen Strahlung vorliegenden Experimenten ist eine Abänderung der Theorie in Gebieten, die größer als der klassische Elektronenradius $r_0 = e^2/(mc^2)$ ausfallen, nicht sehr wahrscheinlich. Das würde bedeuten, daß $\lambda_0 \geq (\hbar c/e^2) mc^2 \approx 70$ MeV gewählt werden muß, d. h. daß die hier diskutierten Abweichungen von der Möllerschen Streuformel erst im Gebiet $E_1^0 \geq 10^9$ eV für genügend große Energieübertragung deutlich zu bemerken sein könnten.